III.Ödev Cevap Anahtarı

1. $v \times w \neq 0 \iff v, w$ *lineer bağımsızdır.*

($\Rightarrow$): $v \times w \neq 0$ olsun. Keyfi $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ için $c_1v + c_2w = 0$ ise $(c_1v + c_2w) \times w = 0$ yazılır. Buradan $c_1v \times w + c_2w \times w = 0$ ve dolayısıyla $c_1v \times w = 0$ elde edilir ki $v \times w \neq 0$ olduğundan $c_1 = 0$ bulunur. Diğer yandan $(c_1v + c_2w) \times v = 0$ olduğundan, benzer biçimde $-c_2v \times w = 0$ olup $c_2 = 0$ elde edilir. Sonuç olarak v, w lineer bağımsızdır.

($\Leftarrow$): v, w lineer bağımsız olsun. Kabul edelim ki $v \times w = 0$ olsun. Buradan

$$v \times w = (v_2w_3 - v_3w_2, -v_1w_3 + v_3w_1, v_1w_2 - v_2w_1) = 0$$

ve bu eşitlikten

$$\begin{aligned} v_2w_3 &= v_3w_2 \\ v_1w_3 &= v_3w_1 \\ v_1w_2 &= v_2w_1 \end{aligned}$$

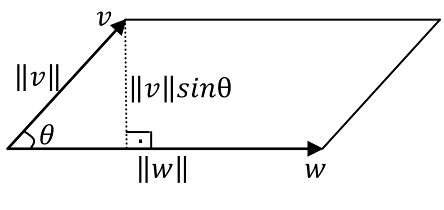
eşitlikleri elde edilir. v, w lineer bağımsız olduğundan $v \neq 0, w \neq 0$ dır. $v \neq 0$ olduğundan da v nin bileşenlerinden en az biri sıfırdan farlıdır. $v_1 \neq 0$ olsun. Bu durumda yukarıdaki denklemlerin son iki tanesini v_1 ile bölersek

$$w_3 = \frac{w_1}{v_1}v_3 \quad ve \quad w_2 = \frac{w_1}{v_1}v_2$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$w = \frac{w_1}{v_1}v$$

olur ki bu, v ile w nın lineer bağımsız olması ile çelişir. Dolayısıyla $v \times w \neq 0$ elde edilir.



$$\begin{aligned} Alan &= \|v\|\|w\| sin\theta \\ &= \|v \times w\| \end{aligned}$$

2. $\beta(s) = \left(\frac{(1+s)^{3/2}}{3}, \frac{(1-s)^{3/2}}{3}, \frac{s}{\sqrt{2}}\right), I: -1 < s < 1$

$$\beta'(s) = \left(\frac{(1+s)^{1/2}}{2}, -\frac{(1-s)^{1/2}}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow \|\beta'(s)\| = \sqrt{\frac{1+s}{4} + \frac{1-s}{4} + \frac{1}{2}} = 1$$

$$T(s) = \beta'(s) = \left(\frac{(1+s)^{1/2}}{2}, -\frac{(1-s)^{1/2}}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$T'(s) = \left(\frac{(1+s)^{-1/2}}{4}, \frac{(1-s)^{-1/2}}{4}, 0\right) \Rightarrow \kappa(s) = \|T'(s)\| = \sqrt{\frac{1}{16(1+s)} + \frac{1}{16(1-s)}}$$

$$\kappa(s) = \frac{\sqrt{2}}{4}(1 - s^2)^{-1/2}$$

$$T' = \kappa N \ \Rightarrow N(s) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - s)^{1/2}, \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + s)^{1/2}, 0\right)$$

$$B = T \times N \ \Rightarrow B(s) = \left(-\frac{1}{2}(1 + s)^{1/2}, \frac{1}{2}(1 - s)^{1/2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$B'(s) = \left(-\frac{1}{4}(1 + s)^{-1/2}, -\frac{1}{4}(1 - s)^{-1/2}, 0\right)$$

$$B' = -\tau N \ \Rightarrow \tau(s) = \frac{\sqrt{2}}{4}(1 - s^2)^{-1/2}$$